

Grundlagenfach 4

Mathematik

1. Stundendotation

1. Klasse	2. Klasse	3. Klasse	4. Klasse
4	4	3	4

Die Schwerpunktfächer Physik und Anwendungen der Mathematik sowie Biologie und Chemie enthalten in den beiden ersten Jahren insgesamt fünf Lektionen "Mathematik für Naturwissenschaften". Aus Gründen der Stoffzuteilung und -abgrenzung wird dieser Bereich zusammen mit dem Grundlagenfach Mathematik dargestellt.

2. Bedeutung des Faches

Generischer und historischer Aspekt

Die Mathematik zeigt in ihrer Entwicklung, dass von der Antike bis zur Neuzeit immer wieder grosse Leistungen erbracht wurden, und dass dieser Prozess keineswegs abgeschlossen ist.

Logischer Aspekt

Wesentliches Merkmal der Mathematik ist die klare Beweisführung aufgrund strenger logischer Gesetzmässigkeiten, ausgehend von einem für die jeweilige Theorie vorgegebenen Axiomensystem. Die verschiedenen Theorien fügen sich zu einem zusammenhängenden System.

Heuristischer Aspekt

Die Mathematik ist eine Kunst, Probleme zu lösen und erfordert die Fähigkeit, Probleme zu analysieren, (richtige) Vermutungen anzustellen, und diese mit Phantasie zu beweisen.

Inhaltlicher Aspekt: Zahlen und Figuren

Die Mathematik beschäftigt sich mit Zahlen und Figuren: Die Algebra mit formalem und die Geometrie mit anschaulichem Charakter ergänzen und durchdringen sich und bilden ein Ganzes.

Anwendungsaspekt

Die Mathematik stellt mit ihren algebraischen und geometrischen Methoden Werkzeuge zur Verfügung, welche zur Lösung von Problemen aus der Chemie, der Physik, den Wirtschaftswissenschaften und anderen Gebieten unentbehrlich sind.

3. Richtziele

Grundkenntnisse

- Die Schülerinnen und Schüler kennen die elementaren Gegenstände, Begriffe und Methoden der Mathematik und ihren Aufbau.
- In der Geometrie sind dies geradlinige und gekrümmte Figuren der Ebene und des Raumes und deren Darstellung, Verwandtschaftsbeziehungen zwischen diesen Figuren wie Kongruenz, Ähnlichkeit oder Affinität und die zugehörigen Abbildungen oder Symmetrien, das Ausmessen der Figuren durch Längen-, Inhalts- und Winkelangaben sowie die analytische Beschreibung der Objekte und ihrer gegenseitigen Lage im Koordinatensystem mit und ohne Vektoren.
- In der Raumgeometrie geht es darum, räumliche Probleme zu analysieren und von Hand, mit 3D-Programmen sowie analytisch zu lösen.
- In der Algebra sind es Zahlen und algebraische Terme, Rechenoperationen und Rechenregeln, im Aufbau von den natürlichen Zahlen bis zu den reellen Zahlen, ev. bis zu den komplexen Zahlen, sowie Gleichungen und deren Auflösung.
- In der Analysis geht es um Funktionen und die zugehörigen Kurven sowie um das Tangenten- und Flächenproblem und deren Lösung durch Grenzwertbildung. Darauf aufbauend lernen die Schülerinnen und Schüler die grundlegenden Sätze der Differential- und Integralrechnung kennen.
- Die Schülerinnen und Schüler kennen den logischen Aspekt der Mathematik, nämlich das Fortschreiten von Axiomen oder Grundeinsichten über Definitionen und zu beweisende Sätze zu neuen Einsichten. Dabei sollen sie die wichtigsten Beweisverfahren wie direkten Beweis, Widerspruchsbeweis und Kontrapositionsbeweis kennen lernen.

Grundfertigkeiten

- Die Schülerinnen und Schüler sollen das rasche und fehlerfreie Rechnen, die Algebra und die Anfänge der Analysis beherrschen: Termumformungen, Ausmultiplizieren, Bruchterme, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Auflösen von Gleichungen, Untersuchung und graphische Darstellung von Funktionen, Differenzieren und Integrieren der Standardfunktionen.
- Sie üben sich in geometrischen Konstruktionen und lernen die Geometrie kennen als universelles Anschauungsmittel für mathematische Zusammenhänge. Mit Hilfe von Skizzen, Modellen, Graphen und Darstellungsverfahren sollen algebraische Probleme in geometrische übersetzt werden und umgekehrt. Das räumliche Vorstellungsvermögen soll gefördert werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein, räumliche Gegenstände zu visualisieren und zu skizzieren.
- Die Schülerinnen und Schüler wissen Hilfsmittel für Mathematik problemgerecht zu nutzen.
- Die Schülerinnen und Schüler lernen, einfache mathematische Sätze eigenständig zu beweisen.

Grundhaltungen

- Die Schülerinnen und Schüler sollen sich an exaktes Arbeiten gewöhnen und lernen, einen Sachverhalt mündlich und schriftlich korrekt darzustellen und wiederzugeben. Sie sollen einerseits logische Genauigkeit, andererseits auch den heuristischen Aspekt der Mathematik kennen lernen: Anhand echter Problemsituationen sollen sie sich in der Kunst üben, in beharrlicher und phantasievoller Auseinandersetzung auch schwierige Aufgaben zu lösen - in der Klasse und auf sich allein gestellt.
- Schülerinnen und Schüler sind offen für die ästhetische Komponente mathematischen Tuns.

4. Jahres- / Stufenziele und Lerninhalte

Verwendete Abkürzungen:

- GFa: Grundlagenfach
GFb: Grundlagenfach für Schwerpunktfächer Biologie/Chemie und Physik/Anwendungen der Mathematik
x: verbindlich
e: empfohlen

Jahres- / Stufenziele

1. Klasse

- Algebra Anfängeralgebra bis zur linearen Funktion
- Geometrie Planimetrie
- Mathematik für Naturwissenschaften Raumgeometrie: Darstellung einfacher Körper und Einführung in die Vektorgeometrie

2. Klasse

- Algebra Ausbau der Algebra bis zur Potenzlehre
- Geometrie Abschluss der Planimetrie und Einführung in die Trigonometrie
- Mathematik für Naturwissenschaften Raumgeometrie: Metrische Aufgaben und projektive Probleme

3. und 4. Klasse

- Algebra Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Analysis Folgen und Reihen, Einführung in die Differential- und Integralrechnung
- Geometrie Ausbau der Trigonometrie und der Vektorgeometrie

Lerninhalte

Algebra 1. Klasse

GFa GFb

Algebra in R

- e e Grundbegriffe aus der Mengenlehre
- x x Repetition und Vertiefung der Grundoperationen in \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} und ihre Rechengesetze (auch Binomische Formeln, Verwandlung von Summen in Produkte, Rechnen mit Wurzeln, Dezimalbrüche, Absolutbeträge)
- e e Division von Polynomen
- x x Bruchterme

Gleichungslehre

- x x Auflösen von Gleichungen, Textaufgaben
- x x Gleichungen mit Parametern
- x x Einfache Ungleichungen, ev. in Verbindung mit Absolutbeträgen

Einführung in den Funktionsbegriff

- | | | |
|---|---|--|
| x | x | Funktionsbegriff und Darstellungsarten |
| x | x | Lineare Funktion $y = ax + b$ |
| | e | Lineare Regression |

Potenzlehre I (ganzzahlige Exponenten)

- | | | |
|---|---|-------------------------------------|
| x | x | Potenzgesetze, Rechnen mit Potenzen |
|---|---|-------------------------------------|

Lineare Gleichungssysteme

- | | | |
|---|---|---|
| x | x | Systeme mit zwei und mehreren Variablen, Textaufgaben, Geradengleichung $ax + by + c = 0$ |
| | e | Determinantenmethode (für 2, ev. auch 3 Variablen) |
| | e | Lineare Optimierung mit zwei Variablen |

Geometrie 1. Klasse

GFa GFb

Elementargeometrie I

- | | | |
|---|---|--|
| x | x | Repetition und Vertiefung der Elementargeometrie (z.B. Kongruenzsätze, Winkelsätze, Tangenten, Ortsbogen, Inkreis) |
| x | x | Einführung in das Beweisen |
| | e | Flächenverwandlung |
| x | x | Satzgruppe am rechtwinkligen Dreieck |
| x | x | Repetition Geradenspiegelung, Drehung, Punktspiegelung, Translation |
| x | x | Vektorbegriff, elementare Vektoroperationen |

2. Kl. x Strahlensätze

2. Kl. x Zentrische Streckung, Ähnlichkeit

Mathematik für Naturwissenschaften 1. und 2. Klasse

(+) bezeichnet empfohlenen, zusätzlichen Lerninhalt, welcher je nach verfügbarer Zeit, Interesse oder schulinternen Gegebenheiten vermittelt werden kann.

Raumgeometrie

Einfache Körper (u.a. Würfel, reguläres Tetraeder, reguläres Oktaeder) in verschiedenen Lagen und Projektionsarten darstellen (Schrägbild, Axonometrie, Zweitafelsystem)

Körper mit Ebenen schneiden

Metrische Aufgaben

Ellipse und Hyperbel

Perspektive Affinität (+)

Einführung in die Matrizenrechnung (+)

Vektorgeometrie

Vektoren in der Ebene und im Raum, Darstellung im Koordinatensystem

Darstellung von Geraden und Ebenen

Anwendungen

Algorithmik

Einführung in Algorithmenentwurf

Algebra 2. Klasse

GFa GFb

Quadratische Gleichungen und Funktionen

- | | | |
|---|---|---|
| x | x | Quadratische Gleichungen, Textaufgaben |
| | e | Linearfaktorzerlegung (Faktorisierungssatz) |
| x | x | Diskussion der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ |
| x | x | Translation eines Graphen im Koordinatensystem |
| e | x | Wurzelgleichungen |
| | e | Quadratische Ungleichungen |

Potenzlehre II (Wurzeln, rationale Exponenten)

- | | | |
|---|---|---|
| x | x | Wurzeln und Potenzen für rationale und reelle Exponenten, Gesetze |
| x | x | Graph der Potenzfunktion $y = x^p$ |
| x | x | Begriff der Umkehrfunktion |

Geometrie 2. Klasse

GFa GFb

Elementargeometrie II

- | | | |
|---|--------|---|
| x | 1. Kl. | Strahlensätze |
| x | 1. Kl. | Zentrische Streckung, Ähnlichkeit |
| | e | Ähnlichkeitsabbildungen |
| | e | Sehnen- und Sekantensatz, Goldener Schnitt, Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck, Apolloniuskreis |
| x | x | Berechnung des Kreises |
| e | x | Oberflächen und Volumenberechnungen |

Trigonometrie I

- | | | |
|---|--------|--|
| x | x | Einführung von sin, cos, tan am rechtwinkligen Dreieck |
| x | x | Beziehungen zwischen sin, cos, tan |
| x | x | Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck |
| x | x | Bogenmass, Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel und deren Umkehrfunktionen |
| e | 3. Kl. | Harmonische Schwingung $y = a \sin(bx+c)$ |
| x | x | Sinussatz und Cosinussatz mit Anwendungen |

Algebra / Analysis 3. und 4. Klasse

GFa GFb

Exponentialfunktion und Logarithmen

- | | | |
|---|---|--|
| x | x | Exponentialfunktion $y = a^x$, Wachstums- und Zerfallsprozesse |
| x | x | Logarithmen, Rechengesetze |
| x | x | Exponentialgleichungen (Gleichungen, welche in den Naturwissenschaften und in der Wahrscheinlichkeit vorkommen.) |

Folgen und Reihen

- | | | |
|---|---|---|
| x | x | Zahlenfolgen, insbesondere arithmetische und geometrische Folgen und Reihen |
| x | x | Grenzwerte von geometrischen Folgen und geometrischen Reihen |

Einführung in die Differentialrechnung

- | | | |
|---|---|--|
| x | x | Begriff der Ableitung und die verschiedenen Erscheinungsformen (Tangentensteigung, Geschwindigkeit, Änderungsrate) |
| x | x | Ableitungsregeln: Summen- und Konstantenregel, Produkt und Quotientenregel, Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion |
| x | x | Zweite Ableitung und deren Bedeutung |
| e | x | Höhere Ableitungen |
| x | x | Ableitung der Grundfunktionen x^r , x^r , \sin , \cos , \tan , \exp , \ln ; Graphen der Grundfunktionen (Monotonie, Symmetrie, asymptotisches Verhalten) |
| x | x | Extremalaufgaben |

Einführung in die Integralrechnung

- | | | |
|---|---|--------------------------------------|
| x | x | Begriff der Stammfunktion |
| x | x | Fundamentalsatz der Analysis |
| x | x | Bestimmtes und unbestimmtes Integral |
| e | e | Integrationsmethoden |
| e | e | Rationale Funktionen |

Geometrie 3. und 4. Klasse

GFa GFb

Vektorgeometrie

- | | | |
|---|---|--|
| x | x | Vektoren in der Ebene und im Raum, Darstellung im Koordinatensystem [Vergleiche Vektorgeometrie, Mathematik für Naturwissenschaften] |
| x | x | Parameterdarstellung und Koordinatengleichung von Gerade und Ebene [Vergleiche Vektorgeometrie, Mathematik für Naturwissenschaften] |
| x | x | Anwendungen auf die Raumgeometrie |
| x | x | Skalarprodukt |
| x | x | Normalendarstellung von Gerade und Ebene |
| e | x | Vektorprodukt |
| | e | Gemischtes Produkt (Spatprodukt) |
| e | x | Kreis und Kugel |

Trigonometrie II

- | | | |
|---|---|-------------------------------------|
| e | x | Additionstheoreme |
| | x | Harmonische Schwingungen |
| | x | Einfache goniometrische Gleichungen |

Stochastik 3. und 4. Klasse

GFa GFb

- | | | |
|---|---|---|
| x | x | Wahrscheinlichkeit: Diskrete Zufallsexperimente, Laplace-Wahrscheinlichkeiten, Binomialverteilung |
| x | x | Statistik: Kennzahlen und einfache Darstellung von Daten |
| e | e | Kombinatorik |

5. Pädagogisch-didaktische Hinweise

Die Mathematik hat zur Heranbildung vieler heute ganz selbstverständlicher Begriffe Jahrhunderte oder gar Jahrtausende gebraucht. Von Schülerinnen und Schülern zu erwarten, dass sie einen Grossteil der Mathematik selber entdecken, wäre daher vermessen. Deshalb wird man auch in Zukunft nicht darum herumkommen, die Mehrzahl mathematischer Begriffsbildungen von aussen an die Schülerinnen und Schüler heranzutragen.

Den Schülerinnen und Schülern soll immer wieder Gelegenheit gegeben werden, allein oder in kleinen Gruppen selber aktiv zu werden, sei es, das Gehörte zu üben oder anzuwenden, sei es, Kommendes selber zu entdecken.

Besonders in den ersten beiden Jahren dürfen an der Übungsphase keine Abstriche gemacht werden, weil hier grundlegende mathematische Werkzeuge bereitgestellt werden, deren Nichtbeherrschung jedem Bemühen auf der Oberstufe den Boden entzieht.

6. Anregungen für den fachübergreifenden Unterricht

Physik

einfache Fehlerrechnung
Geometrische Optik
Gleichförmige Bewegung

Gleichmässig beschleunigte Bewegung
Gasgesetze
Kreisbewegung, Schwingungen und Wellen
Zerlegung von Kräften

Wachstums- und Zerfallsprozesse
Geschwindigkeit, Stromstärke, Leistung, Beschleunigung

Arbeit, Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter, Kräfte,
Geschwindigkeit, Beschleunigung
Radioaktiver Zerfall

Algebra mit ganzen und rationalen Zahlen
Ähnlichkeitsgeometrie
Lineare Gleichungen und Funktionen, Folgen und Reihen
Quadratische Gleichungen und Funktionen
Potenzlehre
Trigonometrie
Trigonometrie, Vektorgeometrie
Exponential- und Logarithmusfunktion
Einführung in die Differential- und Integralrechnung
Vektorrechnung

Chemie

Kristalle
Begriff des pH-Werts
Stöchiometrie

Raumgeometrie
Exponential- und Logarithmusfunktion
Lineare Gleichungssysteme

Biologie

Wachstums- und Zerfallsprozesse, Populationsentwicklung,
Begriff der Information

Folgen, Exponential- und Logarithmusfunktion

Informatik

Begriff der Information

Exponential- und Logarithmusfunktion

Wirtschaftswissenschaften

Optimierungsprobleme
Wachstums- und Zerfallsprozesse
einfache Rentenrechnung
Grenzkosten, Grenzerlös, Preiselastizität

Lineare Optimierung
Exponential- und Logarithmusfunktion
Folgen und Reihen
Differentialrechnung

Sprachen

fremdsprachige Texte

verschiedene Möglichkeiten

Musik

Tonsysteme

Folgen und Reihen

Bildnerisches Gestalten

Stereometrie, Symmetrie, Goldener Schnitt, Ähnlichkeit, harmonische Teilung